ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ GAUSS (ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ - ΣΦΑΛΜΑ)

Έστω ότι τα $a_{ij}^{(1)}$ αποθηκεύονται ως $\overline{a}_{ij}^{(1)}$ όπου $e_{j}^{(2)} = \overline{a}_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(1)}$

και ότι κατά την αποθήκευση το $|e_{ij}| \le e$, $i,j = 1,\dots,n$

$a_{jl}^{(2)} = a_{jl}^{(1)} - m_{j1} a_{1l}^{(1)}$, $\overline{a}_{jl}^{(2)} \approx \overline{a}_{jl}^{(1)} - m_{j1} \cdot \overline{a}_{1l}^{(1)}$ (θεωρώ ότι δεν υπάρχει σφάλμα στο m_{i1})

$e_{jl}^{(2)} = \overline{a}_{jl}^{(2)} - a_{jl}^{(2)} = \overline{a}_{jl}^{(1)} - a_{jl}^{(1)} - m_{j1} \cdot (\overline{a}_{1l}^{(1)} - a_{1l}) = e_{jl}^{(1)} - m_{j1} \cdot e_{1l}^{(1)}$

Εκφραση του σφάλματος μηχανής:

$|e_{jl}^{(1)}| = |e_{jl}^{(1)} - m_{j1} e_{1l}^{(1)}| \le |e_{jl}^{(1)}| + |m_{j1}| \cdot |e_{1l}^{(1)}| \le (1 + |m_{j1}|) e$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΟΥ GAUSS ΜΕ ΜΕΡΙΚΗ ΟΔΗΓΗΣΗ (ΣΦΑΛΜΑΤ

Έστω k τέτοιο ώστε $|a_{k1}| = \max_j |a_{j1}|$, τότε "αλλάζουμε" την πρώτη με την k γραμμή του πίνακα (εξίσωση του συστήματος)

Αν $|m_{ij}| \le 1$ τότε $|e_{j}^{(1)}e| < 2e$ και μετά από n-1 απαλοιφές θα έχουμε $|e_{nn}^{(n)}| \le 2^{n-1} \cdot e$ το μεγαλύτερο δυνατό σφάλμα. Και αν έχουμε σφάλμα αρκετά μεγάλο αυτό μας δείχνει ότι το σύστημα είναι κακής κατάστασης

Για την εναλλαγή γραμμών κάναμε χρήση μεταθετικού πίνακα. Δηλ. $Ax = b \Rightarrow P \cdot Ax = Pb$.

Έστω $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ μία μετάθεση των $i = 1, 2, \dots, n$

τότε: $P = \begin{bmatrix} e^{p_1 T} \\ e^{p_2 T} \\ \vdots \\ e^{p_n T} \end{bmatrix}$ όπου e^{j^T}: γραμμές του μοναδιαίου πίνακα I

$P \cdot A$ είναι ο πίνακας με σειρά γραμμών $p_1, p_2, \dots, p_n$

Συνεπώς, $A_2 = M_1 P_1 A_1$ και $A_3 = M_2 P_2 A_2 = M_2 P_2 M_1 P_1 A_1 \dots$

$\dots A_n = M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \dots M_1 P_1 A_1 = U = P \cdot M \cdot A_1$

όπου U το τελικό προϊόν τριγωνοποίησης του A

Ενώ παράλληλα ότι αλλαγές κάναμε στον A τις ίδιες θα κάναμε και στον πίνακα b.

Επειδή, η εναλλαγή γραμμών είναι κόπος έτσι στην πράξη ενημερώνουμε ένα διάνυσμα $\hat{i}$ που θα δείχνει τη σειρά των γραμμών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Κάθε μεταθετικός πίνακας είναι ορθογώνιος. Δηλ. $P \cdot P^{T} = I$

Έτσι $A \cdot P$ πίνακας με σειρά γραμμών $p_1, p_2, \dots, p_n$

και AP^{T} " " στηλών "

Η μέθοδος Gauss με ολική οδήγηση γίνεται με μετάθεση γραμμών - στηλών ταυτόχρονα ώστε οι πολλαπλ. που χρησιμοποιούνται να είναι οι ελάχιστοι.

$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow PAQQ^{T}x = Pb \Rightarrow PAQy = Pb$, $y = Q^{T}x \Rightarrow x = Qy$

Άσκηση 9 (σελ. 44) "Τροποποιημένη"

Να λυθεί το δοθέν γραμμικό σύστημα $Ax=b$ μέσω Gauss με μερική οδήγηση, εάν:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Έπειτα, να βρεθεί ο μεταθετικός Πίνακας P και στη συνέχεια να γίνει η LU ανάλυση του $A' = PA$ καθώς να βρεθεί ο πίνακας A'^{-1} και A^{-1}.

ΛΥΣΗ

Έχουμε στα $i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ με οδηγό γραμμή την $3^{η}$

με $\max_i |a_{i1}| = 5$ τότε λαμβάνουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -16/5 & -7/5 & 9/5 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

για τη $2^{η}$ στήλη έχουμε το $i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ με ίδια οδηγό γραμμή την $3^{η}$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 25/16 & 25/16 \\ 0 & -16/5 & -7/5 & 9/5 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \text{με} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα, τώρα πλέον μπορεί να λυθεί το σύστημα $Ax=b$

$X^T = [1, -1, 1]$

Έπειτα,

$$A' = P.A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = LU$$

όπου,

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{16}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{16} & 1 \end{pmatrix}$$

$A'x' = I$

Έτσι, $LUx' = I \Rightarrow \begin{cases} Ly' = I & ① \\ Ux' = y' & ② \end{cases}$, $Ax = I$

$PAx' = I \Leftrightarrow Ax' = P^T \Leftrightarrow Ax'P = P^T \cdot P = I \Leftrightarrow x = A^{-1} = x' \cdot P$

①: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & y'_{23} \\ y'_{31} & y'_{32} & y'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow y'^T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

②: $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{16}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{25}{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & -1/8 \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x'^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$

Άρα,

$A'^{-1} = X' = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} \\ \frac{4}{25} & -\frac{2}{5} & -\frac{7}{25} \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$

και

$A^{-1} = x'P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{25} \\ -\frac{7}{25} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{25} \\ \frac{16}{25} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix}$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ CHOLESKY:

Ορισμός: Έστω ένας ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ θα είναι θετικά ορισμένος αν.ν $(x, Ax) > 0$, $\forall x$ εν $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

Ορισμός: Έστω ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ θα είναι θετικά ορισμένος αν.ν $(x, Ax) > 0$, $\forall x$ εν $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Θεώρημα: Αν $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος τότε ο πίνακας που παράγεται (αν διαγράψουμε μια γραμμή και την αντίστοιχη στήλη) θα είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Έστω $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $A_{33} \in \mathbb{R}^{(n-r-1) \times r}$.

Θεωρούμε $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $l = \{r+1, r+2, \dots, n-1\}$

Αρκεί νδο $a'_{kl} = \overline{a}'_{kl}$

$a'_{kl} = a_{k,l+1} = \overline{a}_{l+1,k} = \overline{a}'_{kl}$

Θεωρούμε διάνυσμα: $x = (x_1, 0, x_2)^T \neq \overline{0}$, $x_1 \in \mathbb{C}^r$, $x_2 \in \mathbb{C}^{n-r-1}$

$(x, Ax) = (x', A'x') > 0$, όπου $x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\} \Rightarrow A'$ θετ. ορισμ.

$$(x_1^H, 0, x_2^H) \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^H \\ 0 \\ x_1^H \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1^H, 0, x_2^H) \cdot \begin{bmatrix} A_{11}x_1 + A_{13}x_2 \\ A_{21}x_1 + A_{23}x_2 \\ A_{31}x + A_{33}x_2 \end{bmatrix} = x_1^H A_{11} x_1 + x_1^H A_{13} X_2 + X_2^H A_{31} X_1 + X_2^H A_{31} X_2 =$$

$$= (X_1^H, X_2^H) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = (x', A'x')$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού και θετικά ορισμένου πίνακα είναι θετικά.

Ο $a \in \mathbb{R}^n$ είναι θετικά ορισμένος αν.ν $(x, ax) > 0, \ \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$
$\bar{x} \cdot a \cdot x > 0 \Leftrightarrow a \cdot |x|^2 > 0 \Leftrightarrow a > 0$

Θεώρημα (Cholesky)
Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός και θετ. ορισμένος, τότε $\exists$ κάτω τριγωνικός πίνακας L με $\ell_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$ τέτοιος ώστε $A = L \cdot L^T$, η παραγοντοποίηση αυτή είναι μοναδική!!!